2025학년도 중앙대학교 수시모집 논술전형
자연계열Ⅱ 문제지

대학	학과(학부)	수험 번호	성명

❑ 답안 작성 시 유의 사항

1. 문제지는 표지를 제외하고 모두 4페이지로 구성되어 있습니다.
2. 연습은 문제지의 여백이나 연습지를 이용하십시오.
3. 답안지의 수험 번호 및 인적사항 란에는 반드시 '수정이 불가한' 흑색 필기구(볼펜 등)로 표기하고, 답안은 흑색 필기구(연필, 볼펜, 샤프 등)를 사용하여 작성하십시오.
4. 답안지는 한 장만 사용 가능하며, 답안지 교체 즉시 기존 답안지는 무효 답안 처리 합니다.
5. 답안을 작성할 때 답과 관련된 내용 이외에 어떤 것도 쓰지 마십시오.
6. 답안은 반드시 문항별로 지정된 구역에만 작성하십시오. (지정 구역을 벗어난 답안은 채점이 불가능합니다.)
7. 시험 종료 30분 전부터 답안지 교체는 불가합니다.
8. 보안봉투에 보관한 전자기기라도 시험 중 진동 또는 소음이 발생하는 경우 부정행위로 간주하고 즉시 퇴실 조치합니다.

※ 지정 구역을 벗어난 답안 채점 불가.

※ 수정액, 수정테이프 절대 사용 불가.

※ 위의 내용을 정확하게 숙지하였음을 확인합니다: 응시자 성명 ______________(서명)

중앙대학교
CHUNG-ANG UNIVERSITY

[문제 1] 다음 규칙에 따라 상금을 받는 시행을 한다. 풀이와 함께 물음에 답하시오.

(가) 주머니 A에는 빨간색 공 1개가 들어 있고, 주머니 B에는 파란색 공 5개가 들어 있다. 두 주머니의 공을 주머니 C에 합친 후 임의로 1개를 꺼내서 그 공이 빨간색 공일 때 100만 원의 상금을 받는다. 만일 파란색 공을 꺼낸 경우 상금은 0원이다.

(나) 주머니 C에 합치기 전에, 회당 2만 원의 비용을 지불하면 주머니 A 또는 B를 선택한 후 선택한 주머니에서 임의로 1개의 공을 택하여 제거한다.

(다) (나)는 최대 2회 가능하며, k ($k=1$ 또는 2) 번째에서 주머니를 선택하는 규칙은 다음과 같다.

- 주머니 A를 선택할 확률은 $\frac{a}{k}$ 이고, 주머니 B를 선택할 확률은 $1-\frac{a}{k}$ 이다.
- 주머니 A에 공이 없는 경우 주머니 B에서 공을 택한다.

(라) 공을 제거할 때 지불하는 비용은 상금에서 차감된다. 따라서 상금의 값은 음수가 될 수 있다.

위 시행에서 공을 2회 제거할 때의 상금의 기댓값이 공을 1회 제거할 때의 상금의 기댓값보다 크거나 같도록 하는 a 의 최댓값을 구하시오. (단, $0<a<1$ 이다.) **[20점]**

[문제 2] 다음을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

- 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는 다음과 같다.
  $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
- 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.
- 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.
  $$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$
- 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 다음과 같다.
  $$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$
- 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면 $\int f(x)\,dx=\int f(g(t))g'(t)\,dt$이다.

[문제 2-1] 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'\left(\frac{1}{3}\right)$의 값을 구하시오. **[10점]**

(가) $\lim_{x\to 1}\frac{e^{f(x)}-e}{x-1}=0$이다.
(나) $f''(-1)>0$이다.
(다) 닫힌구간 $[-1, 0]$에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{53}{12}$이다.

[문제 2-2] 좌표평면 위의 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\frac{1}{t+1}x+e^{\frac{t^2-2}{t+1}}$ (단, $t>-1$)가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 할 때, 선분 PQ를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이를 $S(t)$라 하자. 정적분 $\int_0^1 S(t)\,dt$의 값을 구하시오. **[15점]**

[문제 3] 다음을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

- 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 다음이 성립한다.
$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

- 좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$사이의 거리는 $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 이다.

- 미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$에 대하여 함수 $f(x)$가 α와 β를 양끝으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

[문제 3-1] 좌표평면 위의 세 직선 $y=0$, $x=1$, $x=e$와 곡선 $y=(\ln x)^n$으로 둘러싸인 영역의 넓이를 a_n이라 하자. 수열의 합 $\displaystyle\sum_{n=1}^{13}\{a_{n+1}+(n+1)a_n\}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln\left(\frac{n}{15}\right)\ln\left(\frac{n+1}{15}\right)}$을 구하시오. **[10점]**

[문제 3-2] 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(1, t)$, $\mathrm{B}(-1, t)$, $\mathrm{P}(x, 0)$이 있다. 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 함수 $f(x)$는

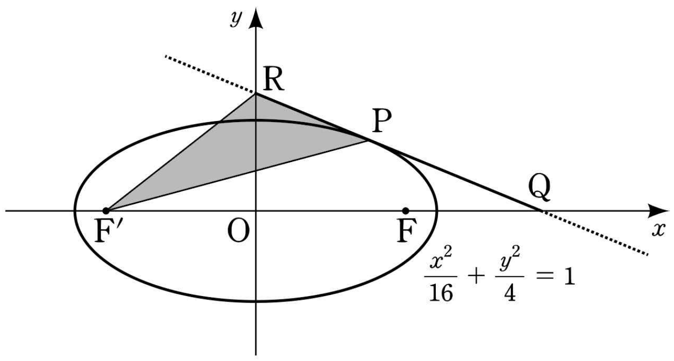
$$f(x) = \ln\overline{\mathrm{PA}} + \ln\overline{\mathrm{PB}}$$

이다. 함수 $f(x)$의 최솟값을 $g(t)$라 할 때, 정적분 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} 2t\,g(t)\,dt$의 값을 구하시오. **[15점]**

[문제 4] 다음을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

- 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ 이다.
- 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$이다.
- 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\theta\,(0^\circ\le\theta\le 180^\circ)$일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$이다.

[문제 4-1] 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$인 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 P에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. 선분 QR의 길이가 최소일 때, 삼각형 PRF′의 넓이를 구하시오. (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) **[15점]**



[문제 4-2] $(m-5)^2+(n-4)^2<9$를 만족시키는 두 정수 m, n에 의하여 정의된 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(m, n)$과 원 $(x+1)^2+(y-8)^2=1$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여 내적 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 최댓값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) **[15점]**

– 끝 –